



## TRATAMENTO COMPUTACIONAL DE ALTO DESEMPENHO EM MÉTODO DE SUBESPAÇOS PARA MODELAGEM DE DADOS

Celso Pascoli Bottura

Gilmar Barreto

Mauricio José Bordon

Annabell Del Real Tamariz

Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação

**Resumo.** A identificação de modelos no espaço de estado com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) lineares e invariantes no tempo a partir de medidas de entrada e saída é um problema de central importância em processamento de sinais e em análise e projeto de sistemas de controle. Em termos gerais, este problema é equivalente a encontrar uma realização para um sistema dinâmico que represente as seqüências de dados de entrada-saída. Neste contexto, uma realização é uma escolha de uma quadrupla de matrizes que representam os dados de entrada-saída com um erro aceitável. Ainda, a formulação apresentada neste trabalho torna esta abordagem para o problema muito atraente para aplicações em engenharia. Neste trabalho, apresentamos uma nova metodologia, usando computação paralela e distribuída, para processar um algoritmo previamente desenvolvido por Verhaegen & Dewilde (1992), para a modelagem de dados no espaço de estados.

**Palavras-chave:** Método de Subespaço, Espaço de Estado, Identificação de Sistemas, Realização, Computação de Alto Desempenho.

### 1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos um algoritmo com alto desempenho para obter modelo no espaço de estado, de dimensão finita, linear, invariante no tempo a partir de dados multivariados de entrada - saída. O algoritmo apresentado é classificado como um esquema de identificação de modelo no subespaço do espaço de estado a partir de dados de entrada - saída. Esta estrutura é então explorada no cálculo da realização. Uma característica comum na organização deste algoritmo é a execução de uma fatorização, por exemplo QR, seguida por uma decomposição em valores singulares e a solução de um conjunto superdeterminado de equações. O esquema apresentado supõe que o sistema enfatizado tem uma seqüência de medidas de entrada - saída disponível.

Na Fig. 1 temos a representação esquemática do sistema dinâmico que pretendemos

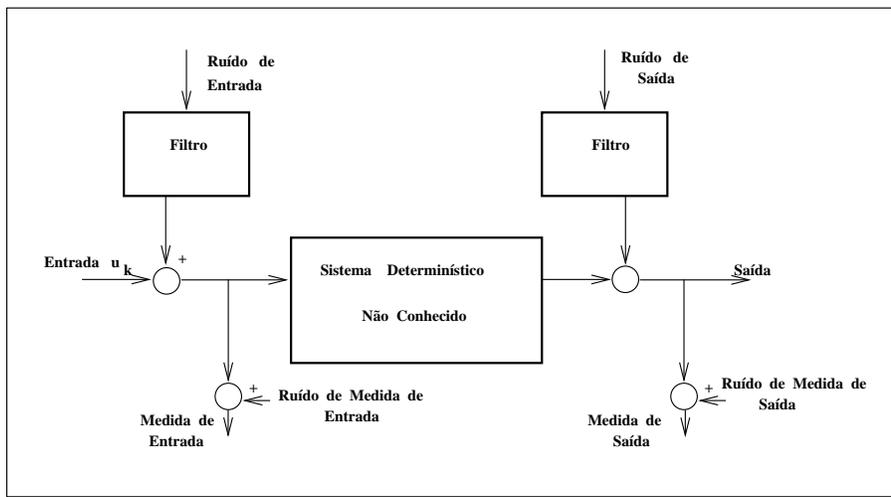


Figura 1: Diagrama Esquemático do Sistema a Ser Modelado

modelar.

A representação de um sistema em variáveis no espaço de estado se torna muito conveniente em engenharia pois processos industriais multivariados podem ser descritos com exatidão por esta classe de modelos, além disso, hoje, as ferramentas de projeto de sistemas de controle que estão disponíveis estão baseadas neste tipo de tratamento. Por esta razão a classe de modelo no espaço de estado vem a ser muito interessante.

Matematicamente o sistema dinâmico pode ser descrito pelo seguinte conjunto de equações :

$$x_{t+1} = \mathbf{A}x_t + \mathbf{B}u_t \quad (1)$$

$$y_t = \mathbf{C}x_t + \mathbf{D}u_t \quad (2)$$

onde : Os vetores  $u_t \in \mathfrak{R}^p$  e  $y_t \in \mathfrak{R}^m$  são as medidas no instante  $t$  de, respectivamente,  $p$  entradas e  $m$  saídas do processo. O vetor  $x_t \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estado do processo para o instante de tempo discreto  $t$  e contém os  $n$  valores numéricos do estado.

As matrizes :

- $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é chamada de matriz do sistema dinâmico. Ela descreve a dinâmica do sistema, pois caracteriza completamente o sistema através de seus autovalores.
- $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  é a matriz de entrada, ela realiza a transformação linear da entrada determinística que irá influenciar no estado futuro.
- $\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  é a matriz de saída e descreve como o estado interno do sistema é transferido para o subespaço das medidas de saída.
- $\mathbf{D} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  é a matriz de alimentação direta.

O problema investigado neste trabalho é identificar o modelo no espaço de estado , incluindo a ordem do sistema e a quádrupla de matrizes, a partir de um algoritmo que explora as propriedades de subespaços, Fig.2.

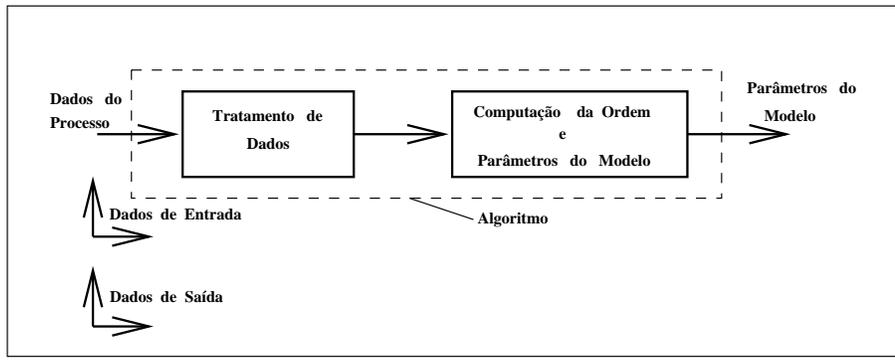


Figura 2: Diagrama Esquemático de um Procedimento para Computação de Modelo no Espaço de Estado

## 2. MÉTODO DE SUBESPAÇOS

O método tratado neste trabalho para obter a ordem do sistema e a quádrupla de matrizes utiliza a aproximação de um subespaço, definido pelo espaço gerado por colunas de matrizes determinadas por dados de entrada-saída do sistema.

Uma representação particularmente útil no estudo das propriedades de realização no espaço de estado, baseado na seqüência de entrada-saída, foi obtida por Moonen e outros (1989). Se  $\{\mathbf{u}, \mathbf{y}\}$  e  $\{\mathbf{x}^n\}$  satisfazem as Eq. 1 e Eq. 2, então estes vetores também satisfazem a equação de entrada e saída dada por :

$$\mathbf{Y}_h = \Gamma_i \mathbf{X} + \mathbf{H}_i \mathbf{U}_h \quad (3)$$

A matriz  $\mathbf{Y}_h$  com  $m.i$  linhas e  $j$  colunas terá consecutivos vetores de saída  $\mathbf{y}_k$ , (de dimensão  $m \times 1$ ), ordenados da seguinte maneira :

$$\mathbf{Y}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{y}[k] & \mathbf{y}[k+1] & \dots & \mathbf{y}[k+j-1] \\ \mathbf{y}[k+1] & \mathbf{y}[k+2] & \dots & \mathbf{y}[k+j] \\ \mathbf{y}[k+2] & \mathbf{y}[k+3] & \dots & \mathbf{y}[k+j+1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{y}[k+i-1] & \mathbf{y}[k+i] & \dots & \mathbf{y}[k+j+i-2] \end{bmatrix} \quad (4)$$

A matriz  $\mathbf{U}_h$  com a mesma estrutura da matriz  $\mathbf{Y}_h$  contém consecutivos vetores de entrada  $\mathbf{u}_k$ , (de dimensão  $p \times 1$ ), ordenados da seguinte maneira :

$$\mathbf{U}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{u}[k] & \mathbf{u}[k+1] & \dots & \mathbf{u}[k+j-1] \\ \mathbf{u}[k+1] & \mathbf{u}[k+2] & \dots & \mathbf{u}[k+j] \\ \mathbf{u}[k+2] & \mathbf{u}[k+3] & \dots & \mathbf{u}[k+j+1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{u}[k+i-1] & \mathbf{u}[k+i] & \dots & \mathbf{u}[k+j+i-2] \end{bmatrix} \quad (5)$$

$\mathbf{X}$  contém os vetores de estado:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] & \mathbf{x}[k+1] & \mathbf{x}[k+2] & \dots & \mathbf{x}[k+j-1] \end{bmatrix} \quad (6)$$

$\Gamma_i$  é uma matriz com estrutura semelhante à da matriz de observabilidade, chamada de matriz de observabilidade estendida, dada por :

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

e finalmente,  $\mathbf{H}_t$  é uma matriz triangular inferior dada por:

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \dots & 0 \\ \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{i-3}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{i-4}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Observa-se que  $\mathbf{D}$  está na diagonal principal da matriz  $\mathbf{H}_t$ .

As matrizes expressas anteriormente foram obtidas através das substituição direta nas matrizes apresentadas nas: Eq.(1) e Eq.(2); propiciando uma representação muito útil para estudar as propriedades de uma realização no espaço estado a partir das seqüências multivariadas de entrada e de saída .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}[k] & \mathbf{y}[k+1] & \dots & \mathbf{y}[k+j-1] \\ \mathbf{y}[k+1] & \mathbf{y}[k+2] & \dots & \mathbf{y}[k+j] \\ \mathbf{y}[k+2] & \mathbf{y}[k+3] & \dots & \mathbf{y}[k+j+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}[k+i-1] & \mathbf{y}[k+i] & \dots & \mathbf{y}[k+j+i-2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}[k] & \mathbf{x}[k+1] & \mathbf{x}[k+2] & \dots & \mathbf{x}[k+j-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \dots & 0 \\ \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{i-3}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{i-4}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}[k] & \mathbf{u}[k+1] & \dots & \mathbf{u}[k+j-1] \\ \mathbf{u}[k+1] & \mathbf{u}[k+2] & \dots & \mathbf{u}[k+j] \\ \mathbf{u}[k+2] & \mathbf{u}[k+3] & \dots & \mathbf{u}[k+j+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}[k+i-1] & \mathbf{u}[k+i] & \dots & \mathbf{u}[k+j+i-2] \end{bmatrix} \quad (9)$$

Definindo uma matriz  $O_i$  como o produto da matriz de observabilidade estendida,  $\Gamma_i$  pela seqüência de estados, tem-se a projeção das saídas futuras no subespaço das saídas

e entradas passadas na direção das entradas futuras:

$$O_i = \Gamma_i \mathbf{X}_f^d \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Y}_f / \mathbf{u}_f \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p \\ \mathbf{Y}_p \end{bmatrix} \quad (10)$$

Na Fig.5 apresentamos uma interpretação geométrica da Eq.10 que é demonstrada algebricamente em Overschee & De Moor, (1996).

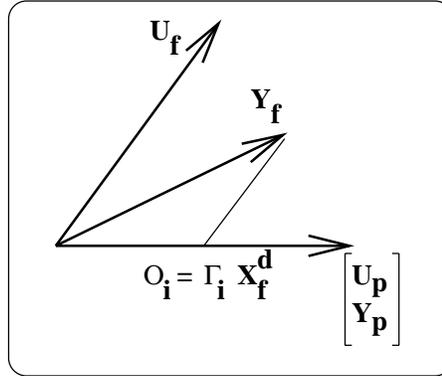


Figura 3: Interpretação de projeção oblíqua em espaço linha.

### 3. IMPLEMENTAÇÃO DE ALTO DESEMPENHO DE MÉTODO DE SUBESPAÇO

O algoritmo implementado pode ser classificado como um procedimento de identificação de sistemas baseado em subespaços, assim ele requer o processamento de uma matriz associada com subespaços gerados por dados de entrada-saída. A matriz com os dados do sistema é construída numa forma particular: matriz de Hankel. Usando operações da Álgebra Linear Numérica tais como fatoração RQ e decomposição em valores singulares sobre a matriz de Hankel obtemos um sistema de equações matriciais lineares super-determinado cuja solução fornece uma realização para o suposto sistema dinâmico que gera as seqüências de dados de entrada-saída.

#### 3.1. Cálculo das Matrizes A e C

Suponha que aplicamos ao sistema uma seqüência de  $N$  entradas independentes  $\mathbf{u}_i, i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , mas temos apenas um segmento finito de uma seqüência de saída, por exemplo de  $t = 0$  até  $t = L$  para  $d \leq L \ll N$ . Podemos então através de uma escolha adequada de uma combinação linear relacionar as entradas conhecidas com a seqüência de saída medido de tal forma que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_{N-1} \\ \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{y}_{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_0 & \mathbf{u}'_1 & \dots & \mathbf{u}'_{N-1} \\ \mathbf{y}'_0 & \mathbf{y}'_1 & \dots & \mathbf{y}'_{N-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Através de transformações apropriadas, por exemplo fatorização **QR** podemos ree-

escrever Eq.11 como :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_{N-1} \\ \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{y}_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & 0 \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^* \\ \mathbf{Q}_2^* \end{bmatrix} \quad (12)$$

onde  $\mathbf{R}_{11}$  e  $\mathbf{R}_{22}$  são matrizes triangulares inferiores de dimensão  $(L+1) \times (L+1)$  e  $[(\mathbf{Q}_1^*)^T \ (\mathbf{Q}_2^*)^T]$  são as primeiras  $2(L+1)$  colunas de uma matriz unitária  $\mathbf{Q}$  tendo dimensão  $N \times N$ .

Logo,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}'_0 & \mathbf{y}'_1 & \dots & \mathbf{y}'_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{22} & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Devido a propriedade de invariância ao deslocamento da matriz  $\mathbf{\Gamma}$  a partir da decomposição em valores singulares de  $\mathbf{R}_{22}$  obtemos :

$$\mathbf{R}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n & |\mathbf{U}_n^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n^T & 0 \\ (\mathbf{V}_n^\perp)^T & \end{bmatrix} \quad (14)$$

Então a matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  serão dadas por :

$$\mathbf{U}_n^{(1)} \mathbf{A}_T = \mathbf{U}_n^{(2)} \quad (15)$$

$$\mathbf{C}_T = \mathbf{U}_n(1:l, :) \quad (16)$$

onde  $\mathbf{U}_n^{(1)}$  é uma submatriz composta pelas primeiras  $(i-1)$  colunas da matriz  $\mathbf{U}_n$  e  $\mathbf{U}_n^{(2)}$  é uma submatriz composta pelas últimas  $(i-1)$  colunas da matriz  $\mathbf{U}_n$ .

### 3.2. Cálculo das Matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$

O desenvolvimento algébrico para o cálculo das matrizes  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  é obtido a partir da fatorização  $\mathbf{QR}$  da matriz de dados de entrada e saída :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{1,i,N} \\ \mathbf{Y}_{1,i,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & | & 0 \\ \mathbf{R}_{21} & | & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^N \\ \mathbf{Q}_2^N \end{bmatrix} \quad (17)$$

Da Eq.17 obtemos :

$$\mathbf{U}_{1,i,N} = \mathbf{R}_{11} \mathbf{Q}_1^N \quad (18)$$

Retomando a Eq.3  $\mathbf{Y}_h = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X} + \mathbf{H}_t \mathbf{U}_h$  podemos substituir  $\mathbf{Y}_h$  obtido da Eq.17 deste modo encontramos :

$$\mathbf{Y}_h = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X} + \mathbf{H}_t \mathbf{U}_h = \mathbf{R}_{21} \mathbf{Q}_1^N \mathbf{R}_{22} \mathbf{Q}_2^N \quad (19)$$

Como o espaço coluna de  $\mathbf{R}_{22}$  é igual ao espaço coluna de  $\mathbf{\Gamma}_i$  e se a decomposição em valores singulares de  $\mathbf{R}_{22} = \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n \mathbf{V}_n$  então haverá uma matriz de transformação de tal forma que  $\mathbf{\Gamma}_i \mathbf{T} = \mathbf{U}_n$ . Então podemos escrever que :

$$\mathbf{U}_n \mathbf{T}^{-1} \mathbf{X} + \mathbf{H}_t \mathbf{R}_{11} \mathbf{Q}_1 = \mathbf{R}_{21} \mathbf{Q}_1^N + \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n \mathbf{V}_n^T \mathbf{Q}_2^N \quad (20)$$

Como  $\mathbf{U}_n^\perp \mathbf{U}_n = 0$  obtemos da Eq. 20:

$$[(\mathbf{U}_n^\perp)^T \mathbf{H}_t \mathbf{R}_{11} - (\mathbf{U}_n^\perp)^T \mathbf{R}_{21}] \mathbf{Q}_1 = 0 \quad (21)$$

ou

$$(\mathbf{U}_n^\perp)^T \mathbf{H}_t \mathbf{R}_{11} - (\mathbf{U}_n^\perp)^T \mathbf{R}_{21} = 0 \quad (22)$$

Como  $\mathbf{R}_{21}$  tem inversa :

$$(\mathbf{U}_n^\perp)^T \mathbf{H}_t - (\mathbf{U}_n^\perp)^T \mathbf{R}_{21} \mathbf{R}_{11}^{-1} = 0 \quad (23)$$

como  $\mathbf{H}_t = \text{func}[\mathbf{B} \mid \mathbf{D}]$  temos a quádrupla de matrizes determinada.

### 3.3. Proposta De Implementação Multiprocessada

Na Fig. 4 apresentamos uma proposta para paralelização do algoritmo. Na figura notamos que existe uma paralelização natural do algoritmo, no cálculo das matrizes  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{U}$ , partes 6 e 7, por exemplo. No entanto, na implementação efetuada paralelizamos as fatorizações  $\mathbf{QR}$  que devido ao grande número de operações algébricas envolvidas possuem elevada complexidade computacional, da ordem de  $2mn^2$  onde  $m \times n$  é o número de linhas por colunas da matriz.

## 4. RESULTADOS

As matrizes identificadas a partir de uma seqüência de entrada-saída, com 49 vetores de entrada multivariada de 3 elementos e vetores de saída multivariada de 2 elementos nos levou realização das matrizes:  $\mathbf{A}_{4 \times 4}$ ;  $\mathbf{B}_{4 \times 3}$  ;  $\mathbf{C}_{2 \times 4}$  e  $\mathbf{D}_{2 \times 3}$  .

Tabela 1: Medidas de Tempo nas Etapas do Algoritmo.

Etapas do Algoritmo	Tempo (s)
1	0.02
2	0.02
3	0.01
4	0.01
5	0.00
6	0.02
7	0.03
8	0.03
9	0.08

Observe na Tabela 1 que o maior tempo é gasto na etapa 9 aonde temos a necessidade do cálculo da pseudo-inversa da matriz  $\mathbf{R}$ . Estes tempos referem a um exemplo de sistema de ordem 4.

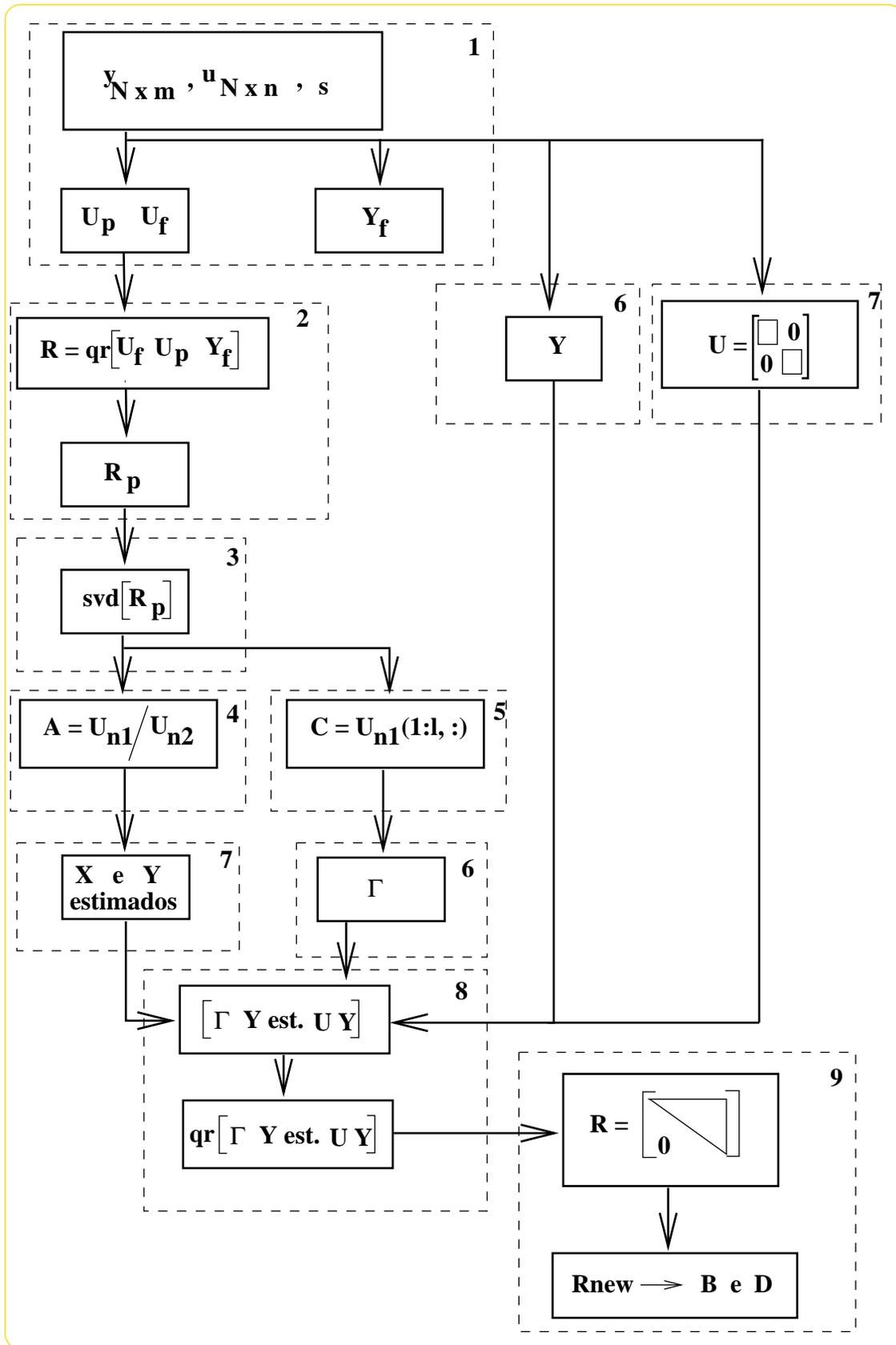


Figura 4: Proposta de Paralelização do Algoritmo.

Os resultados obtidos com processamento paralelo utilizando dois processadores em máquinas independentes duplicaram o tempo de processamento da fatorização **QR**. Tal fato ocorreu devido ao tempo de comunicação utilizado entre os processadores.

## 5. CONCLUSÕES

A vantagem da implementação desta proposta utilizando processamento paralelo e distribuído é a possibilidade da realização da quádrupla de matrizes do sistema em tempo real, transformando o algoritmo de Verhaegen & Dewilde num procedimento de alto desempenho para aplicações em identificação de sistemas.

A implementação de alto desempenho apesar de ter apresentado tempo de processamento foi executado de forma paralela propiciou uma menor carga computacional para os processadores envolvidos, e o aumento de tempo foi ocasionado pela comunicação de dados entre os processadores. Na continuidade deste trabalho inclui-se aspectos de paralelização da decomposição em valores singulares e do cálculo das matrizes pseudo-inversas envolvidas no algoritmo apresentado.

## REFERÊNCIAS

- Bertsekas, D. & Tsitsiklis, J., 1989, *Parallel and Distributed Computations*, Prentice Hall.
- Golub, Gene H. & Van Loan, Charles F., 1989, *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press.
- Golub, Gene H. & Ortega, James M., 1993, *Scientific Computing an Introduction with Parallel Computing*, Academic Press.
- Jainandunsing K. & Deprettrere, E. F., 1989, A New Class Of Parallel Algorithms For Solving Systems Of Linear Equations. *SIAM J.Sci.Stat.Comput.* Vol.10, No.5, 880-912.
- Janakiraman, P. A. & Renganathan, S., 1982, Recursive Computation of Pseudo-Inverse of Matrices. *Automatica*, Volume 18, No. 5, 631-633.
- Moonen, Marc; Moor, Bart De ; Vandenberghe, Lieven & Vandewalle, Joos, 1989, On-and Off-Line Identification Of Linear State-Space Models, *INT.J. Control*, Vol.49, No.1, 219-232.
- Overschee, Peter van & Moor, Bart De, 1996, *Subspace Identification For Linear Systems*, Kluwer Academic Publishers.
- Verhaegen, Michel & Dewilde, Patrick, 1992, Subspace Model Identification, *Int.J. Control*, Vol.56, n.5, 1187-1210.
- Willems, Jan C., 1986, From Time Series to Linear System - Part I. Finite Dimensional Linear Time Invariant Systems, *Automatica*, Volume 22, No.5, 561-580.
- Willems, Jan C., 1986, From Time Series to Linear System - Part II. Exact Modelling. *Automatica*, Volume 22, No.6, 675-694.

## AN HIGH PERFORMANCE COMPUTATIONAL APPROACH IN SUBSPACES METHODS FOR DATA MODELLING

**Abstract.** *Identification of multiple input multiple output linear time invariant dynamical system from input-output data sequences is a central problem in signal processing and in control systems analysis and design. Roughly speaking, this problem is equivalent to find a realization for a dynamical system in order to represent input output data sequences. In this way a realization is a choice of a quadruple of matrices that can represent input output data within an acceptable error. Further, the formulation presented in this work leads to a nice approach for engineering applications. In this work, we present a new methodology using parallel and distributed computation for processing Verhaegen & Dewilde's algorithm for state space data modelling.*

**Keywords:** *Subspace Method, State-Space, System Identification, Realization, High Performance Computation*